**CAPÍTUO I**

**FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

***Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas*.**

Una vez que se ha especificado una unidad de medida, un número x  **R** puede ser usado para

representar un punto en una línea.

0 1 2

un par (x,y)  **R**2 se puede usar para representar un punto en un plano

(x,y)

y

x

De manera análoga, una terna (x,y, z)  **R3** se puede usar para representar un punto en el espacio

tridimensional.

Para ello tomamos un punto fijo cualquiera **o** , llamado origen, y tres planos distintos, mutuamente perpendiculares, que pasan por **o**. Los planos se intersecan en pares en tres rectas (ejes) mutuamente perpendiculares que pasan por **o** llamados eje **x**, eje **y** , y eje z.

Para hacer la representación gráfica de los tres ejes, podemos trazar el eje **y** , y el eje **z** de frente y la parte positiva del eje **x** se representa en una dirección inclinada, para simular profundidad .

x

y

z

o

Si queremos ubicar un punto determinado en el espacio, P (x , y , z), dibujamos primero el punto (x,y) en el plano **x-y**, desde este punto, dibujamos un segmento paralelo al eje **z,** y orientado de acuerdo al signo de z y de longitud z, como se muestra en la figura

x

y

z

o

(x,y)

P(x,y,z)

Los ejes tomados de a dos, determinan planos llamados **planos coordenados.** En total son 3 planos que dividen al espacio en 8 sectores llamados **octantes.** El octante que corresponde a valores positivos de loa ejes se llama **primer octante.**

## Superficies en el Espacio

**Definición**:

Una superficie en el espacio, es el conjunto de puntos del espacio que verifican alguna condición , la cual está dada generalmente por una ecuación F(x,y,z)=0.

Hay una infinidad de superficies, pero veremos ahora algunas superficies particulares en el espacio, que usaremos mucho:

**Planos:**

**Es el conjunto de puntos (x,y,z) del espacio que cumplen con la siguiente ecuación**

**Ax +By + Cz + D = 0**

**donde A, B, C son números reales, llamados coeficientes principales, y D es el término independiente.**

**Si D = 0 significa que el plano contiene al origen de coordenadas (0,0,0), si D ≠0 el plano no contiene al origen**

**Ejemplos:**

**x+y+2z = 4 A=1 B =1 C= 2 D= -4**

**y+x=1 A = 1 B = 1 C = 0 D = -1**

Los planos pueden tener posiciones particulares en el espacio.

a) **PLANOS NO PARALELOS NI A LOS EJES NI A LOS PLANOS COORDENADOS:**

**Estos planos se distinguen por que tienen todos sus coeficientes principales no nulos**

**Ejemplo:**

**x+y+2z = 4**

Para graficar superficies en el espacio, se usan **las trazas de la superficie**

**Definición de trazas**

***Las* trazas*,* son las curvas deintersección de la superficiecon losplanos coordenados, ocon planos paralelos** **a los** **planos coordenados*.***

**En el ejemplo:**

**x+y+2z = 4**

Vamos a hallar sus trazas, se calculan planteando un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de la superficie, y las ecuaciones de los planos coordenados.

**Traza con el plano x-y :**

**x+y+2z = 4**

**z = 0 ( plano x-y)**

sustituyendo nos queda: x+y =4

despejando y = 4 – x es un recta en el plano x-y

**Traza con el plano x-z :**

**x+y+2z= 4**

**y = 0 (plano x-z)**

sustituyendo nos queda: x+ 2z =4

despejando z = es un recta en el plano x-z

**Traza con el plano y-z :**

**x+y+2z= 4**

**x = 0 (plano y-z)**

sustituyendo nos queda: y+ 2z =4

despejando z = es un recta en el plano y-z

Gráficamente:

4

4

2

**Ejemplo:**

**3x+y+2z=6**

**Traza con el plano x-y :**

**3x+y+2z=6**

**z = 0**

sustituyendo nos queda: 3 x+y = 6

despejando y = 6 – 3x es un recta en el plano x-y

**Traza con el plano x-z :**

**3x+y+2z=6**

**y = 0**

sustituyendo nos queda: 3x+ 2z = 6

despejando z = es un recta en el plano x-z

**Traza con el plano y-z :**

**3x+y+2z=6**

**x = 0**

sustituyendo nos queda: y+ 2z = 6

despejando z = es un recta en el plano y-z

Gráficamente:

b) **PLANOS PARALELOS O CONTENER A LOS EJES CARTESIANOS**

En este caso, se distingue por que **uno solo** de los coeficientes principales es nulo.

**Ejemplo:**

**y + x =1 A = 1 B = 1 C = 0 D = -1**

la variable que no está en la ecuación se llama **variable libre, en este ejemplo la variable libre es z.**

**Esto significa que el plano es paralelo al eje z, o lo contiene**

Para graficar calculamos las trazas:

**Traza con el plano x-z:**

**y + x =1**

**y = 0**

sustituyendo nos queda: **x = 1** que es una recta en el plano x-z

**Traza con el plano y-z :**

**y + x =1**

**x = 0**

sustituyendo nos queda: **y = 1** que es una recta en el plano y-z

**Traza con el plano x-y :**

**y + x =1**

**z = 0**

En este caso no se puede sustituir, por lo que la traza es la recta cuya ecuación es **y + x =1**

Despejando : **y = 1 - x**

**Gráficamente:**

.

1

1

**Ejemplo:**

**x + 2 z =4**

En este caso la variable libre es **y**, por lo tanto es un plano paralelo al **eje y** o lo contiene

Calculamos las trazas:

**Traza con el plano y-z:**

**x + 2 z =4**

**x = 0**

sustituyendo nos queda: **z = 2** que es una recta en el plano y-z

**Traza con el plano x-y :**

**x + 2 z =4**

**z = 0**

sustituyendo nos queda: **x = 4** que es una recta en el plano x-y

**Traza con el plano x-z :**

**x + 2 z =4**

**y = 0**

En este caso no se puede sustituir, por lo que la traza es la recta cuya ecuación es **x + 2 z =4**

**Despejando: z = **

**Gráficamente:**

2

4

c) **PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS**

En este caso se distingue por que hay dos coeficientes principales nulos

**Ejemplo :**

**z = 4**

A = 0 B = 0 C = 1 D = -4

Las variables libres son **x**  e **y,**  por lo tanto es un plano paralelo al plano **x-y**

En este caso particular, como es un plano paralelo al plano **x-y,** todos los puntos que pertenecen al plano tienen la forma **P(x,y,4)** , por lo tanto la traza con el plano **z-x** es una recta paralela al **eje x** , y corta al eje z en 4 , y la traza con el plano **z-y** es una recta paralela al **eje y** , y corta al eje z en 4

4

**Gráficamente:**

**Ejemplo 2:**

A = 1 B = 0 C = 0 D = -10

**x = 10**

Es la ecuación de un plano paralelo al plano **z-y .** Aquí las variables libres son **z** e  **y.** En este caso particular, como es un plano paralelo al plano **z-y,** todos los puntos que pertenecen al plano tienen la forma **P(10,y,z)** , por lo tanto la traza con el plano **z-x** es una recta paralela al **eje z** , y corta al eje x en 10 , y la traza con el plano **x-y** es una recta paralela al **eje y**

10

**Ejemplo 3**:

**y = 3** A = 0 B = 1 C = 0 D = -3

Es la ecuación de un plano paralelo al plano **z-x**

Aquí las variables libres son **z** y  **x**

En este caso particular, como es un plano paralelo al plano **z-x,** todos los puntos que pertenecen al plano tienen la forma **P(x,3,z)** , por lo tanto la traza con el plano **z-y** es una recta paralela al **eje z** , y corta al eje y en 3 , y la traza con el plano **x-y** es una recta paralela al **eje x** ,

3

* **FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

En Matemática se trabaja mucho con funciones. Recordemos su definición:

**Sean A y B dos conjuntos**

**Una relación f de A en B es una función si y solo si se cumplen las condiciones:**

**1°) Existencia: **

**2°) Unicidad: **

**Esta definición es general, y CUALQUIER FUNCIÓN que se defina debe verificarla.**

La diferencia entre los distintos tipos de funciones que verán a lo largo de su carrera, está en la naturaleza de los elementos de los conjuntos A y B , los cuales se relacionan a partir de una condición.

En Cálculo I, trabajamos con funciones reales de una variable, las cuales las definimos de la siguiente manera:

f: D 🡪R dada por y = f(x) siendo D R

Nosotros veremos ahora, funciones reales, cuyo codominio seguirán siendo los reales ( R ) , pero modificaremos el dominio.

**Funciones de dos variables:**

Consideremos un conjunto **D** incluido en el plano ( R2 ), es decir:



Definimos una **función real de dos variables** de la siguiente manera:

f: D 🡪R con D R2

que a cada par de valores (x,y) del dominio ( D ), le hace corresponder como imagen un número real que indicaremos con la letra **z**. En símbolos:

**f: D 🡪 R siendo** D R2

**(x, y) 🡪 z = f(x, y)**

En este caso **x** e **y** son variables independientes, y **z** es la variable dependiente.

Este tipo de funciones se dice de **dos variables** por que tiene **dos variables independientes**

**Ejemplo:**

Supongamos un rectángulo cuya base la indicamos con la letra **x** , la altura la indicamos con la letra **y**

**y**

x

El área de ese rectángulo depende del valor de la base ( x ), y de la altura (y).

Podemos definir una función de dos variables ,que a cada par de valores (x,y) le hacemos corresponder el valor del área del rectángulo.

En símbolos:

f: D 🡪 R2 dada por z = f(x,y) = x.y

**Funciones de tres variables**:

De igual manera se puede definir una función de tres variables de la siguiente manera:

f: D 🡪R con D R3

que a cada terna de valores (x,y,z) del dominio ( D ), le hace corresponder como imagen un número real que indicaremos con la letra **w**.

En símbolos:

**f: D 🡪 R siendo** D R3

**(x, y, z) 🡪 w = f(x, y,z)**

En este caso **x,y,z** **y** son variables independientes, y **w** es la variable dependiente

**Ejemplo:**

Supongamos un prisma rectangular cuyas medidas son las siguientes

z

y

x

x

El volumen de ese prisma depende del valor de sus medidas. Podemos definir una función de tres variables que a cada terna (x,y,z) le haga corresponder el valor de su volumen.

En símbolos:

f: D 🡪 R3 dada por w= f(x,y,z) = x.y.z

**Definición de función de varias variables :**

**En general se pueden definir funciones reales de n variables independientes de la siguiente manera:**

**Sea D={(x1 , x 2 ,…, x n ) : (x1 , x 2 ,…, x n )  Rn }**

**f: D 🡪R con D Rn**

**que a cada ene-upla (x1 , x 2 ,…, x n ) de valores del dominio ( D ), le hace corresponder como imagen un número real que indicaremos con la letra z.**

**En símbolos:**

**f: D 🡪 R siendo D Rn**

**(x1 , x 2 ,…, x n ) 🡪 z = f(x1 , x 2 ,…, x n )**

En esta materia, trabajaremos en general con funciones de dos variables, pero todo lo que veamos se puede extender a varias variables.

**Forma explícita e implícita de una función de varias variables:**

Si la fórmula que define la función, tiene separada la variable dependiente de las independientes, se dice que la función está dada en forma **explícita.**

**Ejemplo:**

**f: D 🡪R dada por z = f(x,y) = x 2 + y 2 ( forma explícita)**

Si la fórmula que representa la función tiene todas las variables juntas, se dice que la función está dada en forma **implícita.**

**En el ejemplo anterior:**

**F(x,y,z) = z – x 2 – y 2 = 0 ( forma implícita)**

**Dominio de una función de dos variables**

Dada una función de dos variables z = f(x,y), el dominio es el conjunto de valores (x,y) , para los cuales su imagen es un número real incluido en el codominio.

En símbolos:

**D = {(x,y ) : (x,y) R , f(x,y)  R}**

Ejemplo 1:

**z = x2 + y2**

en este caso vemos que por las operaciones que afectan a las variables independientes , estas pueden tomar cualquier valor, por lo tanto decimos que el dominio es todo el plano **R 2**

Ejemplo 2:

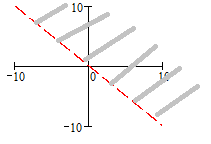
**z = ln ( x+y) D = ?**

por haber un logaritmo sabemos que el argumento no puede ser nulo ni negativo, por lo tanto :

**x + y > 0 y > - x**

**por lo tanto D = {(x , y ) : (x,y) R , y > - x }**

**gráficamente:**

****

**Ejemplo 3:**

**z =  por haber un cociente el denominador no puede ser nulo, por lo tanto**

**D = {(x , y ) : (x,y) R , x ≠ 0 }**

**Representación gráfica de funciones de dos variables**

En **R**, dada una función y = f(x) la gráfica es el conjunto de puntos (x,y) del plano, para los cuales y = f(x) . Se obtienen **curvas planas en el espacio R2**.

En **R2** , dada una función z = f(x,y), la gráfica es el conjunto de puntos (x,y,z) del espacio, para los cuales z = f(x,y). Esta gráfica da una ***superficie* en el espacio R3**.

**Advertencia: NO TODA SUPERFICIE EN EL ESPACIO ES LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES. Por ejemplo x = 4 es un plano vertical paralelo al eje y , pero no cumple con la condición de unicidad.**

Las formas que pueden tener las ***superficies*** que representan gráficamente una función de dos variables, son muy variadas, Pueden ser planos o no.

En el caso de funciones de más de dos variables independientes, **no se puede graficar,** ya que el espacio en el que nos movemos es de tres dimensiones.

**Ahora cómo graficamos superficies en el espacio?**

En realidad es muy complicado graficar a mano, superficies en el espacio. Generalmente se usan programas como winplot, mathcad, matemática, etc.

Sin embargo vamos a realizar gráficas sencillas a mano.

Para ello usamos la misma técnica utilizada para planos , es decir con trazas :

***Recuerde que las* trazas*, son la* intersección de la superficie *con los* planos coordenados ocon planos paralelos** a los **planos coordenados*.***

***Estas se obtienen sustituyendo en la fórmula*** **z = f(x, y)** *,* ***diferentes valores de* x *, de* y*, o de* z.**

Veremos los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1:** **z = 4 – y2 x es variable libre**

Calculamos las trazas:

**Traza con el plano x-y :**

**z = 4 – y2**

**z = 0**

sustituyendo nos queda:  **y2 = 4** |y| = 2 que son dos rectas y = 2 y = -2 en el plano x-y

**Traza con el plano x-z :**

***z = 4 – y2***

**y = 0**

Sustituyendo nos queda **z = 4** que es una recta en el plano x-z

**Traza con el plano y-z:**

**z = 4 – y2**

**x = 0**

como x es variable libre no figura, por lo tanto no podemos reemplazar quiere decir que la traza es

z = 4 – y2 que es una parábola en el plano y-z



Si hacemos la gráfica con algún soft adecuado por ejemplo mathcad nos queda: ( cuidado que los ejes coordenados no salen)



Ejemplo:

z = x2 + y2

**Traza con el plano x-z :**

z = x2 + y2

**y = 0**

Sustituyendo nos queda **z = x2** que es una parábola en el plano x-z

**Traza con el plano y-z:**

z = x2 + y2

**x = 0**

Sustituyendo nos queda **z = y2** que es una parábola en el plano y-z

**Traza con el plano x-y :**

z = x2 + y2

**z = 0**

Sustituyendo nos queda  **x2 + y2 = 0** que es el punto (0,0) en el plano x-y





O con algún graficador:

**Curvas de nivel de una superficie**

**Definición:**

**Dada una función z=f(x,y), se llaman curvas de nivel a la proyección en el plano x-y, de las trazas de la superficie con planos paralelos al x-y, cuya ecuación es :**

**f(x,y) = c**

En el ejemplo anterior del paraboloide:

Se sustituye en la fórmula de la superficie distintos valores de z, y se van obteniendo distintas curvas, que son las **trazas con planos paralelos al plano x-y** a distinta alturas:

z = 1 nos queda **x2 + y2 = 1** que es una circunferencia de radio 1

z = 4 nos queda **x2 + y2 = 4** que es una circunferencia de radio 2

z = 9 nos queda **x2 + y2 = 9** que es una circunferencia de radio 3

Gráficamente:

***Cuidado*:** 

Trazas

Las trazas NO son las curvas de nivel. **Las curvas de nivel son la proyección en el plano x-y de esas trazas**



Curvas de nivel correspondientes a distintas alturas

**Note que en todos los puntos de la curva de nivel la función se mantiene constante .**

Dibujando diferentes *curvas de nivel*, correspondientes a las alturas constantes

c1, c2, .....cn, podemos obtener un ***mapa de contorno*** de la superficie **z = f (x, y)** *.* ***Un*** mapa de contorno muestra la variación de z con respecto a x e y , por el espaciado entre las curvas de nivel . Mucho espacio entre las curvas de nivel , indica que z, varía lentamente, mientras que un espaciado pequeño indica un cambio rápido en z. Para proyectar una buena ilusión tridimensional en un mapa de contorno es importante elegir valores de c de forma que estén espaciados uniformemente.

**Otros Ejemplos: en cada caso calcule las curvas de nivel y verifique:**

**z= 4 – y2 Curvas de nivel**





**Ejemplo 2:**

**z = 2 – x - 4y curvas de nivel**



**Ejemplo 3:**

**z = 2 - y**



Dibujando diferentes *curvas de nivel*, correspondientes a las alturas constantes

c1, c2, .....cn, podemos obtener un ***mapa de contorno*** de la superficie **z = f (x, y)** *.*

**Aclaración:**

No todas las superficies que representan funciones de dos variables son sencillas, generalmente hay que usar algún programa adecuado. Mostramos aquí algunos ejemplos:









“